Ecuaciones Diferenciales I
Examen XXIII

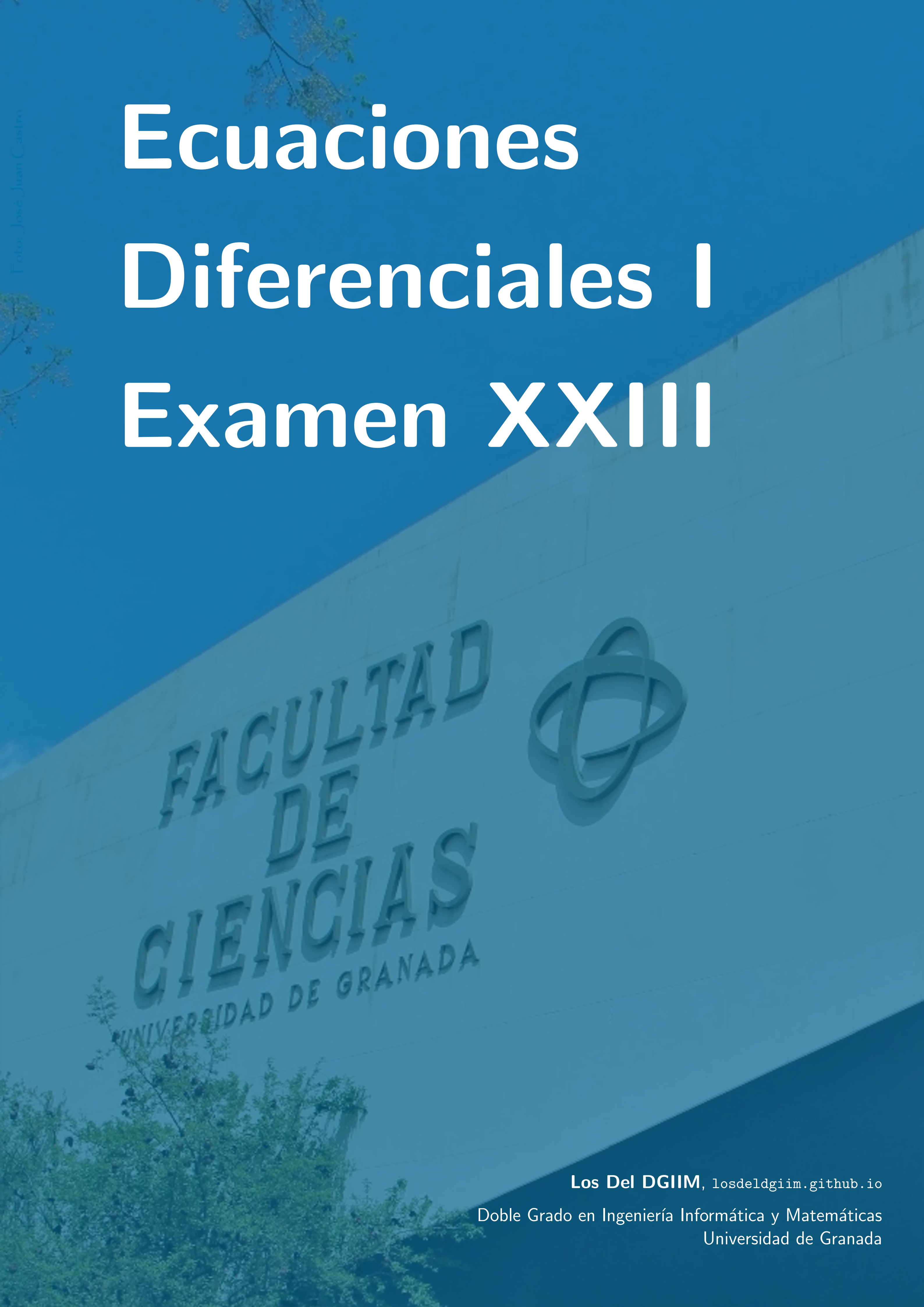

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I
Examen XXIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial C.

Fecha 21 de Diciembre de 2021.

Ejercicio 1. Resuelve la ecuación lineal

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = e^{-2t}.$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea asociada. Sus valores propios son:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda+2)^3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -2.$$

Por tanto, tenemos que un sistema fundamental de la ecuación homogénea asociada es:

$$\{e^{-2t}, te^{-2t}, t^2e^{-2t}\}.$$

Para la solución particular, buscamos una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = At^3e^{-2t}. \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Calculemos sus derivadas:

$$\begin{aligned}
x_p'(t) &= Ae^{-2t}\left[3t^2 - 2t^3\right], \\
x_p''(t) &= Ae^{-2t}\left[6t - 6t^2 - 6t^2 + 4t^3\right] = 2Ae^{-2t}\left[2t^3 - 6t^2 + 3t\right], \\
x_p'''(t) &= 2Ae^{-2t}\left[6t^2 - 12t + 3 - 4t^3 + 12t^2 - 6t\right] = 2Ae^{-2t}\left[-4t^3 + 18t^2 - 18t + 3\right].
\end{aligned}$$

Por tanto, para que $x_p(t)$ sea solución de la ecuación dada, debemos tener:

$$\begin{aligned}
2A\cancel{e^{-2t}}\left[-4t^3 + 18t^2 - 18t + 3\right] + 12A\cancel{e^{-2t}}\left[2t^3 - 6t^2 + 3t\right] + 12A\cancel{e^{-2t}}\left[3t^2 - 2t^3\right] + 8At^3\cancel{e^{-2t}} &= \cancel{e^{-2t}}. \\
2A\left[-\cancel{4t^3} + \cancel{18t^2} - 18t + 3 + \cancel{12t^3} - \cancel{36t^2} + 18t + \cancel{18t^2} - \cancel{12t^3} + \cancel{4t^3}\right] &= 1 \\
6A = 1 \Longrightarrow A &= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación dada es:

$$x_p(t) = \frac{1}{6}t^3e^{-2t}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación dada es:

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_3t^2e^{-2t} + \frac{1}{6}t^3e^{-2t}.$$

Ejercicio 2. Encuentra una ecuación de segundo orden de la forma

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0,$$

tal que $\{e^t, \operatorname{sen} t\}$ sea un sistema fundamental. ¿Pueden los coeficientes estar definidos en todo $\mathbb{R}$?

Como las funciones dadas son ya linealmente independientes, tan solo tenemos que plantear que sean soluciones. Para esto hay dos opciones:

Método Rutinario: Tenemos que: Para que la exponencial sea solución, debemos tener:

$$\begin{aligned}
a(t)e^t + b(t)e^t + c(t)e^t &= 0, \\
e^t\left[a(t) + b(t) + c(t)\right] &= 0 \\
a(t) + b(t) + c(t) &= 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para que el seno sea solución, debemos tener:

$$\begin{aligned} -a(t)\operatorname{sen}(t) + b(t)\cos(t) + c(t)\operatorname{sen}(t) &= 0, \\ \operatorname{sen}(t)\left[-a(t) + c(t)\right] + b(t)\cos(t) &= 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones que debemos resolver es, para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a(t) + b(t) + c(t) = 0, \\ \operatorname{sen}(t)\left[-a(t) + c(t)\right] + b(t)\cos(t) = 0. \end{cases}$$

Resolver este sistema no es sencillo, por lo que buscamos otra alternativa.

Método Alternativo: En nuestro caso, queremos que toda solución de la ecuación diferencial $x(t)$ sea linealmente dependiente de $\{e^t, \operatorname{sen} t\}$. Como la ecuación es de orden 2, tenemos que $x(t)$ sería 2 veces derivable, por lo que podemos considerar el Wronskiano de las tres soluciones. Además, si se anulase en algún punto, tendríamos que las soluciones serían linealmente independientes, por lo que hemos de imponer que ese Wronskiano sea constantemente nulo.

$$\begin{aligned} W(e^t, \operatorname{sen} t, x)(t) &= \begin{vmatrix} e^t & \operatorname{sen} t & x(t) \\ e^t & \cos t & x'(t) \\ e^t & -\operatorname{sen} t & x''(t) \end{vmatrix} = \\ &= e^t \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sen} t & x(t) \\ 1 & \cos t & x'(t) \\ 1 & -\operatorname{sen} t & x''(t) \end{vmatrix} = \\ &= e^t\left[x''(t)\cos t - x(t)\operatorname{sen} t + x'(t)\operatorname{sen} t\right] - e^t\left[-x'(t)\operatorname{sen} t + x''(t)\operatorname{sen} t + x(t)\cos t\right] = \\ &= x''(t)e^t\left[\cos t - \operatorname{sen} t\right] + x'(t)e^t\left[\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\right] + x(t)e^t\left[-\operatorname{sen} t - \cos t\right] = \\ &= x''(t)e^t\left[\cos t - \operatorname{sen} t\right] + 2x'(t)e^t\operatorname{sen} t - x(t)e^t\left[\operatorname{sen} t + \cos t\right] = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por tanto, definimos:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^t\left[\cos t - \operatorname{sen} t\right], \\ b(t) &= 2e^t \operatorname{sen} t, \\ c(t) &= -e^t\left[\operatorname{sen} t + \cos t\right]. \end{aligned}$$

De esta forma, $\{e^t, \operatorname{sen} t\}$ son soluciones de la ecuación dada. No obstante, para poder afirmar que el espacio de las soluciones tiene dimensión 2, y concluir entonces que forman un sistema fundamental, hemos de considerar que el coeficiente que acompaña a x'' es 1, por lo que nuestra ecuación queda:

$$x'' + \frac{b(t)}{a(t)}x' + \frac{c(t)}{a(t)}x = 0.$$

Por tanto, en este caso, forman un sistema fundamental, pero no se pueden definir en todo $\mathbb{R}$, ya que $a(t)$ se anula en los puntos de la forma:

$$\cos t = \operatorname{sen} t \Longleftrightarrow \tan t = 1 \Longleftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, hemos de restringuir el dominio de definición de los coeficientes a intervalos de la forma:

$$\left]\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+(k+1)\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 3. Sea A una matriz cuadrada nilpotente de grado p (es decir, $A^p = 0$). Demuestra que la derivada $p-$ésima de una matriz fundamental del sistema $x' = Ax$ es cero. Como consecuencia, demuestra que todas las soluciones del sistema son polinomiales.

Consideramos la matriz fundamental del sistema en $t = 0$:

$$\Phi(t) = e^{tA}.$$

Calculémosla. Tenemos que:

$$\Phi(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{t^n A^n}{n!}$$

donde en $(*)$ hemos usado que A es nilpotente de grado p. Por tanto, tenemos que $\Phi(t)$ es una expresión polinómica en t (aunque los coeficientes sean matrices) cuyo monomio de mayor grado tiene grado $p-1$, por lo que:

$$\Phi^{(p)}(t) = 0.$$

Por tanto, ya hemos visto que la derivada $p-$ésima de una matriz fundamental del sistema es cero; pero veámoslo ahora para toda matriz fundamental del sistema. Sea $\Psi(t)$ otra matriz fundamental del sistema, por lo que $\exists C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, con $|C| \neq 0$, tal que:

$$\Psi(t) = \Phi(t)C \Longrightarrow \Psi^{(p)}(t) = \Phi^{(p)}(t)C = 0 \cdot C = 0$$

Por tanto, la derivada $p-$ésima de cualquier matriz fundamental del sistema es cero. Como Φ es una matriz fundamental del sistema, sus todas las soluciones son una combinación lineal de sus columnas, por lo que para cada solución $x(t)$ $\exists c \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$x(t) = \Phi(t)c \Longrightarrow x^{(p)}(t) = \Phi^{(p)}(t) \cdot c = 0 \cdot c = 0.$$

Por tanto, como la derivada $p-$ésima de toda solución es cero, todas las soluciones son polinomiales[1].

Ejercicio 4. Encuentra la forma Canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

[1] Este hecho debe ser conocido por el lector. Se puede probar integrando p veces, de forma que llegamos a $x(t)$ y en cada paso habremos obtenido un parámetro y un monomio.

Calculamos en primer lugar su polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -8 & -12 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -12 & -6-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda\left[\lambda(6+\lambda)+12\right] - [8] = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda+2)^3. \end{aligned}$$

Por tanto, el único valor propio de A es $\lambda = -2$. Calculamos ahora su espacio propio:

$$V_{-2} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A+2I)v = 0\right\} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{pmatrix} v = 0\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

Por tanto, tenemos que la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = -2$ es 1, por lo que la forma canónica de Jordan de A es:

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$